Ueber die Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen auf Kurven vom Geschlecht p.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karl-Universität Tübingen

vorgelegt von

Julius Sommer,
aus Reutlingen.

Tübingen, 1898.
Druck von H. Laupp jr.

Ueber die Bestimmung
ausgezeichneter Punktgruppen
auf
Kurven vom Geschlecht p.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
einer
hohen naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Eberhard-Karl-Universität Tübingen

vorgelegt von

Julius Sommer,
aus Reutlingen.

ACAD
LUND.UNIV.
BIBL.

Tübingen, 1898.
Druck von H. Laupp jr.

Von der Fakultät angenommen den 30. Oktober 1897.

Inhalt.

Seite

Einleitung 5

§ 1. Die Bestimmung der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p 7

§ 2. Bestimmung der Anzahl $\xi(R, r, p)$ gewisser ausgezeichneter Punktgruppen 13

§ 3. Beziehung zwischen Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf Kurven von verschiedenem Geschlecht 16

§ 4. Ueber die Bestimmung der Spezialgruppen $g_R^{(r)}$, welche residual sind zu den Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p 18

§ 5. Spezialgruppen $g_Q^{(q)}$ mit der Bedingung $\tau = 0$. 28

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552309_0204

Einleitung.

Das Problem der Spezialgruppen $g_Q^{(q)}$ einer q-fachen Mannigfaltigkeit von je Q Punkten auf einer Kurve mit allgemeinen Moduln, das durch Riemann's Theorie der Abel'schen und algebraischen Funktionen in die Wissenschaft eingeführt wurde, ist seitdem mehrfach Gegenstand der Untersuchung gewesen. Ein erstes einfaches Beispiel, die Spezialgruppen $g_6^{(2)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht 6, die Herr Brill[1]) mit den vierfach schneidenden Sehnen einer Raumkurve 8ter Ordnung und vom Geschlecht 6 in Verbindung gebracht hatte, gab den Ausgangspunkt für die Abzählung[2]) der gemeinschaftlichen Lösungen eines Systems von Gleichungen, welche durch das Verschwinden der Determinanten einer Matrix gebildet werden. Diese führten schliesslich zur allgemeinen Formulierung des Problems der Spezialgruppen und zur Aufstellung einer Formel für die Zahl der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p in der Abhandlung der Herren Brill-Nöther „Ueber algebraische Funktionen etc." Math. Ann. Bd. VII. Herr Brill gab für diese Formel später den strengen Beweis mit Hilfe der allgemeinen Korrespondenzformel[3]). Der Zusammenhang der Spezialgruppen mit Punktgruppen auf Kurven in höheren Räumen wurde von Herrn Castelnuovo[4]) weiter verfolgt und erwies sich für die Abzählung sehr fruchtbar. Herr Castelnuovo[5]) ge-

1) Brill, Mathem. Annalen. Bd. II. S. 471.

2) Ders., Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen. Bd. V.

Ders., Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Kurven. Bd. IV.

3) Ders., Ueber algebraische Korrespondenzen. II. Mathem. Ann. Bd. 36.

4) Castelnuovo, Ricerche di geometria sulle curve algebriche. Torino 1889.

5) Castelnuovo, Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere. Acad. dei Lincei, vol. V, serie 4a. 1889.

langte zu einer Formel für die Zahl der allgemeinen Spezialgruppen $g_Q^{(\varrho)}$, indem er von Abzählungen von Herrn Schubert Gebrauch macht. Andererseits hat Herr Zeuthen[1]) die Formel von Brill durch Betrachtungen an ebenen Kurven, die ihm eine elegante Rekursionsformel lieferten, bewiesen.

In dem Bericht über die Entwicklung der algebraischen Funktionen der Herren Brill-Nöther[2]) ist darauf hingewiesen, dass die Operationen, die Herr Castelnuovo an Kurven in höheren Räumen vornimmt, auch durch Betrachtungen an ebenen Kurven ersetzt werden können. Durch Untersuchung der Veränderungen, welche eine Spezialgruppe auf einer Kurve erfährt, wenn zu den vorhandenen Doppelpunkten der Kurve ein neuer hinzutritt, habe ich für die Zahl der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ und der dazu residualen Gruppen $g_R^{(r)}$ einige von den Zeuthen'schen verschiedene Rekursionsformeln erhalten, die, wenn man ihre Bedeutung für Kurven in höheren Räumen untersucht, sich als identisch mit denen erweisen, welche Herr Castelnuovo[3]) für die Lösung gewisser Aufgaben der abzählenden Geometrie in höheren Räumen aufgestellt hat. Mit Hilfe dieser Formeln ergab sich ein einfacher Beweis der von Herrn Brill angegebenen Formel, sowie eine Methode, die Behandlung der Spezialgruppen, für welche die Zahl (§ 1) $\tau = 0$ ist, auf ein Raumproblem zurückzuführen.

Ich möchte mir erlauben an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. v. Brill in Tübingen meinen herzlichen Dank auszusprechen, für die vielseitige Anregung, welche ich in meinen Studien von ihm erfahren durfte und für das wohlwollende Interesse, das er mir stets entgegenbrachte.

---

1) H. G. Zeuthen, Mathem. Annalen. Bd. 40. Seite 119.

2) Brill-Nöther, Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Die hier benutzten Begriffe und Bezeichnungen findet man in Abschn. X, Nr. 12, S. 542 zusammengestellt.

3) Castelnuovo, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche. Rendiconti del circolo matematico di Palermo. Tome III. 1889.

§ 1.

Die Bestimmung der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p.

Auf einer Kurve $C_n^{(p)}$, von der Ordnung n und vom Geschlecht p, sei eine Spezialschar $g_Q^{(1)}$ bestimmt; gehört zu dieser als Rest eine Spezialschar $\gamma_R^{(r)}$, so bestehen nach dem Riemann-Roch'schen Reciprocitätssatz zwischen den Zahlen Q, R, r die Relationen

$$(1) \quad \ldots\ldots \begin{cases} R = 2p - 2 - Q \\ r = p - Q. \end{cases}$$

Ausserdem hat man noch für die von Brill-Nöther eingeführte Zahl τ, durch welche die Mannigfaltigkeit der Scharen $g_Q^{(1)}$ und $\gamma_R^{(r)}$ bezeichnet wird, die Formel:

$$(2) \quad \tau = p - (q+1)(r+1) = p - 2(p - Q + 1) = 2Q - p - 2.$$

Das „Problem der Spezialgruppen" $g_Q^{(1)}$ auf einer allgemeinen Kurve, das zunächst behandelt werden soll, ist nun in ausführlicher Fassung das folgende:

Auf einer Grundkurve $C_n^{(p)}$ sollen zu

$$\tau + 1 = 2Q - p - 1$$

beliebig angenommenen Punkten weitere

$$Q - (\tau + 1) = p - Q + 1$$

Punkte der Kurve so bestimmt werden, dass die adjungierten Kurven C_{n-3}, welche durch die $\tau + 1$ beliebig gewählten Punkte und diese $(p - Q + 1)$ Punkte hindurchgehen, noch ein ∞^r-System bilden.

Die adjungierten Kurven C_{n-3} bilden eine $(p-1)$fach unendliche lineare Schar; nachdem nun für die Schar $\tau + 1 = 2Q - p - 1$

Punkte als Basispunkte festgelegt sind, bleiben in der allgemeinen Gleichung der Schar noch

$$p - 1 - (2Q - p - 1) = 2(p - Q) = 2r$$

unbestimmte Koeffizienten. Die Aufgabe verlangt aber die Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen von $p - Q + 1 = r + 1$ Punkten auf der Kurve. Daher kann man das Problem der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ als speziellen Fall der Aufgabe auffassen:

Auf einer Kurve $C_n^{(p)}$ sind eine Anzahl $(2Q - p - 1)$Punkte fest angenommen, durch welche eine $2r$-fach unendliche lineare Schar adjungierter Kurven hindurchgeht. Die Gesamtheit der nicht festen Schnittpunkte der adjungierten Kurven mit der Grundkurve sei $R + r + 1$. Man sucht die Anzahl ausgezeichneter Gruppen von $r + 1$Punkten, durch die noch eine ∞^r-Schar der adjungierten Kurven hindurchgeht; oder man sucht die Gruppen von r Punkten von einer solchen speziellen Lage, dass die adjungierten Kurven durch dieselben alle ausserdem noch einen weiteren festen Punkt der Grundkurve als Basispunkt gemeinsam haben.

Die Verallgemeinerung dieser Formulierung gegenüber der früheren besteht darin, dass wir uns die ausgezeichneten Punktgruppen[1]) nicht mehr speziell durch C_{n-3} ausgeschnitten denken, sondern durch adjungierte Kurven von beliebigem Grade $s > n - 3$. Dies ist stets möglich, da nach dem Satz von Riemann-Roch zwischen den Grössen r, R, p die Beziehung besteht

$$r = R - p + 1 + 1,$$

oder $$2r = R + r + 2 - p = (R_1 + r + 1) - p,$$

wenn wir für einen Augenblick $R_1 = R + 1$ anstatt R in der Aufgabe schreiben. Die adjungierten Kurven vom Grad $s > n - 3$ sind gewählt wegen der grösseren Zahl fester Basispunkte, welche dadurch zur Verfügung stehen und die auf der Grundkurve oder ausser-

---

1) Ich mache hier Gebrauch von der von den Herren Brill-Nöther (Die Entwicklung der algebraischen Funktionen. S. 543) eingeführten Bezeichnung. Darnach werden ausgezeichnete Gruppen solche Gruppen Γ_A^0 von A Punkten genannt, welche einer linearen Schar von Kurven, die durch sie hindurchgehen, weniger Bestimmungsstücke entziehen, als die Anzahl ihrer Punkte beträgt. Spezialgruppen sind Punktgruppen, welche gegenüber φ-Kurven (C_{n-3}) ausgezeichnet sind.

halb derselben angenommen werden können. Als charakteristische Zahlen bleiben für das Kurvensystem die Zahl der linearen veränderlichen Parameter $2r$ und die Zahl der beweglichen Schnittpunkte $R_1 + r + 1$ mit der Grundkurve.

Algebraisch wird die Aufgabe, die ausgezeichneten Punktgruppen von $r+1$ Punkten zu bestimmen, durch welche noch ∞^r adjungierte Kurven des Systems gehen, die die Kurve ausserdem noch in R beweglichen Punkten schneiden, gelöst durch das simultane Bestehen einer Anzahl Gleichungen, die sich aus einer Matrix ableiten. Die gesuchte Zahl ist abhängig von den Zahlen R, r, p. Wir bezeichnen sie nach dem Vorgange von Herrn Zeuthen[1]) mit

$$\xi(R, r, p).$$

In gleicher Weise vollzieht sich die Bestimmung der Spezialgruppen auf einer Grundkurve, und ihre Anzahl ist nur abhängig von den den Kurven C_{n-3} charakteristischen Zahlen. Unter der hier zutreffenden Voraussetzung allgemeiner Kurvensysteme ist mit der Zahl der ausgezeichneten Gruppen auf einer Grundkurve auch das Problem der Spezialgruppen gelöst, wenn man die für die φ-Kurven geltenden Zahlen in die gefundene Lösung einsetzt.

Im allgemeinen genügt es, die adjungierten Kurven vom Grad $n-2$ oder $n-1$ anzunehmen.

Um die Anzahl der ausgezeichneten Punktgruppen zu bestimmen, verfahren wir nun folgendermassen: Es ist für die Aufstellung der gesuchten Zahl gleichgültig, welche Punkte der Kurve $C_n^{(p)}$ man als Basispunkte des Kurvensystems wählt; indem man eine spezielle Grundkurve und gewisse ausgezeichnete Lagen der festen Basispunkte annimmt, gelingt es, für die gesuchte Zahl eine Rekursionsformel herzustellen.

Man denke sich nun an Stelle einer beliebigen Kurve $C_n^{(p)}$ eine solche, welche aus einer Kurve $C_n^{(p-1)}$ durch Deformation, nämlich die Auflösung eines Doppelpunkts in zwei sehr nahe hyperbelartige Zweige (oder auch ein kleines Oval), hervorgegangen ist. Von den festen Basispunkten, deren Lage willkürlich ist, wählt man einen, P, auf einem der Hyperbelzweige in der Nähe des aufgelösten Doppelpunkts. Dann kann man die ausgezeichneten Gruppen von $r+1$ Punkten, welche gesucht sind, in zwei Untergruppen scheiden:

1) H. G. Zeuthen, Math. Annalen. Bd. 40. S. 119.

a) in solche Gruppen, von welchen kein Punkt in die Nähe des Punkts P fällt;

b) in solche Gruppen, von welchen ein Punkt in die Nähe des Punkts P fällt.

Die adjungierten Kurven, welche nach Voraussetzung durch P hindurchgehen, schneiden immer zugleich einen der Hyperbelzweige noch einmal und beim Zusammenrücken der Zweige zu einem Doppelpunkt fällt dieser dem Punkt P benachbarte Schnittpunkt mit P zusammen in den Doppelpunkt.

Wenn dann die beiden Zweige sich wieder zum Doppelpunkt vereinigt haben, in welchen auch P gelegt wird, so geben die unter a) aufgeführten Punktgruppen auf der Kurve vom Geschlecht $p-1$ wieder ausgezeichnete Gruppen von $(r+1)$ Punkten, durch welche noch ∞^rKurven eines $2r$-fach unendlichen linearen Systems adjungierter Kurven hindurchgehen, welche die Grundkurve jetzt aber nur noch in $R-1$ beweglichen Punkten schneiden, weil einer dieser Punkte in den Doppelpunkt P gefallen ist. Die Zahl dieser Punktgruppen, die ebenso definiert sind, wie die Gruppen auf der Kurve $C_n^{(p)}$, ist:

$$\xi(R-1, r, p-1).$$

Von den unter b) unterbegriffenen Punktgruppen fällt bei der Bildung des Doppelpunkts, also beim Uebergang der $C_n^{(p)}$ in eine $C_n^{(p-1)}$, immer ein ausgezeichneter Punkt in den Doppelpunkt hinein und mit P zusammen. Die Verbindungslinien des Punkts P mit den in seiner Nähe liegenden Punkten X_o, X_o', ... einer ausgezeichneten Gruppe nähern sich je einer bestimmten Richtung. Die unter b) fallenden Gruppen geben dann auf der $C_n^{(p-1)}$ Veranlassung zu:

Gruppen von r Punkten, durch welche noch ∞^rKurven gehen, welche in dem neugebildeten Doppelpunkt alle dieselbe (für je eine Gruppe von r Punkten bestimmte) Tangente haben.

Dann bilden schon die r Punkte, welche nicht im Doppelpunkte liegen, eine ausgezeichnete Gruppe, sie sind nur $r-1$ Bestimmungsstücken für die adjungierten Kurven gleichwertig. Denn solange die beiden Zweige sich noch nicht zum Doppelpunkt vereinigt haben, werden alle Kurven durch $r-1$ der ausgezeichneten Punkte und P die Kurve in der Nähe des Punktes P und eines Punktes X noch

einmal schneiden. Es muss dann aber einer der übrigen Schnittpunkte dem $r$ten Punkt unendlich nahe liegen und mit diesem zusammenfallen, wenn P und X vereinigt sind. Dies heisst, dass die r Punkte auf der $C_n^{(p-1)}$ eine ausgezeichnete Gruppe bilden, durch welche noch ein ∞^{r+1} System möglich ist.

Die Bestimmung dieser Punktgruppen kann man auf das alte Problem zurückführen, indem man für das Kurvensystem noch zwei feste Punkte annimmt; es ist dann die Zahl der unbestimmten linearen Koeffizienten noch $2r-2$, und die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte $R-2$. Die Zahl der ausgezeichneten Punktgruppen von r Punkten auf $C_n^{(p-1)}$, durch welche noch ∞^{r-1} Kurven gehen, ist jetzt zu bezeichnen durch:

$$\xi(R-2, r-1, p-1).$$

Da sich nun die Punktgruppen auf der $C_n^{(p)}$ aus den beiden Gruppen a) und b) zusammensetzen, so erhält man die Formel:

A) $$\xi(R, r, p) = \xi(R-1, r, p-1) + \xi(R-2, r-1, p-1).$$

Neben dieser Rekursionsformel für die Zahl $\xi(R, r, p)$, welche diese aus entsprechenden Zahlen der Kurve vom Geschlecht $(p-1)$ zu berechnen erlaubt, giebt es nun noch eine zweite Relation für ausgezeichnete Punktgruppen auf derselben Kurve.

Es sei wie vorhin eine Kurve $C_n^{(p)}$ gegeben und ein adjungiertes Kurvensystem, welches eine Anzahl fester Basispunkte besitzt, von denen mindestens einer, P, ausserhalb der Kurve liegt. Die adjungierten Kurven sollen wieder $2r$ unbestimmte Koeffizienten enthalten und die gegebene Kurve in $R+r+1$ Punkten schneiden. Man sucht wieder $(r+1)$ Punkte auf der $C_n^{(p)}$, durch welche noch ∞^r viele adjungierte Kurven gehen: $\xi(R, r, p)$. Rückt nun einer ausserhalb der Kurve fest angenommenen Punkte P an die Kurve $C_n^{(p)}$ heran, so fällt von den Schnittpunkten der adjungierten Kurven mit der $C_n^{(p)}$ im allgemeinen auch einer in die Nähe des Punktes P. Durch das Verhalten dieses Schnittpunktes lassen sich die ausgezeichneten Punktgruppen unterscheiden:

a) in solche Gruppen, von denen kein Punkt in die Nähe des Punktes P fällt;

b) in solche Gruppen, von welchen ein Punkt in die Nähe des Punktes P fällt.

Ist der Punkt P vollends auf die Kurve aufgerückt, so fällt einer der veränderlichen Punkte mit P zusammen. Die Gruppen a) bilden dann Gruppen von $(r+1)$ Punkten, durch welche noch ∞^r adjungierte Kurven gehen, die nun aber ausser in den $r+1$ Punkten nur noch in $R-1$ beweglichen Punkten schneiden, weil einer derselben mit P zusammengefallen ist. Die Zahl dieser Punktgruppen ist ausgedrückt durch die Formel:

$$\xi\,(R-1,\ r,\ p).$$

Dagegen fällt von den Gruppen b) je ein Punkt mit P zusammen, wenn dieser Punkt auf die Kurve gerückt ist. Durch die gleiche Ueberlegung wie oben ergiebt sich dann, dass die Zahl der Gruppen b) gleich der Zahl ausgezeichneter Gruppen von r Punkten auf der $C_n^{(p)}$ ist, durch welche noch ∞^{r-1} adjungierte Kurven gehen, die noch $2r-2$ unbestimmte Konstante enthalten, indem für dieselben ein weiterer Basispunkt auf der Kurve und ein solcher ausserhalb, oder indem in dem Punkt P eine feste Tangente für alle ∞^{r-1} adjungierten Kurven, angenommen ist; ausser in den r Punkten wird die Grundkurve von diesen noch in $R-1$ beweglichen Punkten geschnitten. Die Zahl dieser Gruppen ist:

$$\xi\,(R-1,\ r-1,\ p).$$

Die Zusammenfassung der für $a)$ und $b)$ aufgestellten Zahlen ergiebt die zweite Rekursionsformel:

B) $$\xi\,(R,\ r,\ p) = \xi\,(R-1,\ r,\ p) + \xi\,(R-1,\ r-1,\ p)$$

Anmerkung. Als Beispiel möge die Aufgabe der Spezialgruppen $g_3^{(1)}$ auf einer Kurve $C_5^{(4)}$ mit $d=2$ Doppelpunkten dienen. Man wählt für die adjungierten Kurven C_2 einen festen Basispunkt auf der Grundkurve und sucht dazu Spezialgruppen von 2 Punkten, durch welche noch ∞^1 viele adjungierte φ-Kurven hindurchgelegt werden können. Diese Punktgruppen erhält man in einfacher Weise dadurch, dass man den festen Basispunkt mit jedem der beiden Doppelpunkte durch eine Gerade verbindet; was auf zwei solcher ausgezeichneter Gruppen führt. Diese Bestimmung führe man nun nach der allgemeinen, oben gegebenen Methode aus, indem man an

Stelle einer beliebigen $C_5^{(4)}$ eine Kurve wählt, die durch Auflösung eines Doppelpunkts aus einer $C_5^{(3)}$ abgeleitet ist und wobei der feste Basispunkt in die Nähe des aufgelösten Doppelpunkts verlegt ist.

§ 2.

Bestimmung der Zahl $\xi(R, r, p)$.

Wir haben für die Bestimmung der Zahl $\xi(R, r, p)$ bis jetzt zwei Rekursionsformeln gewonnen:

A) $\xi(R, r, p) = \xi(R-1, r, p-1) + \xi(R-2, r-1, p-1)$

B) $\xi(R, r, p) = \xi(R-1, r, p) \quad + \xi(R-1, r-1, p)$,

durch welche die Bestimmung dieser Zahl für eine $C^{(p)}$ zurückgeführt ist auf die Bestimmung für eine $C^{(p-1)}$. Die Formel B) gilt insbesondere auch noch für rationale Kurven, $p = o$:

$$\xi(R, r) = \xi(R-1, r) + \xi(R-1, r-1),$$

woraus man durch wiederholte Anwendung erhält:

$$\xi(R-1, r) = \xi(R-2, r) + \xi(R-2, r-1)$$

. . . . . .

und wenn man die Erniedrigung der Zahl R fortsetzt bis $R = r$, dann sämtliche Gleichungen zusammenfasst, so erhält man:

C) $\xi(R, r) = \xi(R-1, r-1) + \xi(R-2, r-1) + \ldots\ldots\ldots$

$$+ \xi(r, r-1) + \xi(r, r).$$

Diese letzte Formel gestattet die Bestimmung von $\xi(R, r)$, wenn es gelingt:

1) einen Wert der Zahl $\xi(R, r)$ anzugeben für ein spezielles r und beliebiges R, weil man vermöge der Formel C) von $r-1$ auf r u. s. f. schliessen kann;

2) für ein beliebiges r den Wert aufzustellen für die Grösse $\xi(r, r)$.

Beide Aufgaben lassen sich einfach lösen. Man nehme für die erste Aufgabe als Grundkurve eine Gerade an. Es sei ein Kurvensystem mit $2r = 2$ veränderlichen linearen Parametern gegeben, das $R + 2$ bewegliche Schnittpunkte mit der Geraden hat. Ge-

sucht sind die Gruppen von 2 Punkten auf der Geraden, durch welche ∞^1 viele Kurven des Systems noch hindurchgehen.

Man kann nun die Kurven des Systems benützen zu einer eindeutigen Transformation, wobei die Gerade ein—eindeutig übergeführt wird in eine Kurve vom Grade $R+2$ und vom Geschlecht 0. Diese Kurve besitzt alsdann genau so viele Doppelpunkte, als auf der Geraden Gruppen von zwei Punkten existieren, durch welche noch ∞^1 viele der transformierenden Kurven hindurchgehen. Es ist also:

$$\xi\,(R,\,1) = \binom{R+1}{2}.$$

Ferner ergiebt sich unmittelbar;

$$\xi\,(R,\,0) = \binom{R+1}{1}.$$

Die zweite Aufgabe ist diese: Ein Kurvensystem mit $2r$ willkürlichen linearen Parametern schneidet eine Kurve vom Geschlecht 0, z. B. eine Gerade, in $r+r+1 = 2r+1$ beweglichen Punkten, wieviele Gruppen $\xi\,(r, r)$ von $(r+1)$ getrennten Punkten giebt es auf der Kurve, durch welche noch ∞^r Kurven gehen?

Die algebraische Ausführung dieser Aufgabe führt auf ein Gleichungssystem, welches im Allgemeinen e i n e Lösung besitzen muss, wenn es in speziellen Fällen eine Lösung besitzt. Die Zahl dieser Lösungen, also $\xi\,(r, r)$ kann in der That nicht grösser sein als 1. Denn existierten etwa zwei derartige Punktgruppen von $r+1$ Punkten auf der Grundkurve, so lege man durch r Punkte der einen und r Punkte der andern Gruppe eine Kurve des Systems; dann müsste diese Kurve jedesmal auch durch den $(r+1)^{\text{ten}}$ Punkt der zwei Gruppen gehen und die Kurve des Systems würde die Grundkurve in $2r+2$ Punkten schneiden. Denn es ist ausgeschlossen, dass die Punktgruppen einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben. Hätten sie nämlich z. B. einen Punkt x gemeinsam, so lege man durch r Punkte der einen Punktgruppe und $r-1$ Punkte der andern, ferner noch einen beliebigen Punkt der Grundkurve eine Kurve des Systems, dann muss dieselbe nach Voraussetzung durch x hindurchgehen, und da sie nun durch r Punkte der zweiten Gruppe geht, so müsste sie den $(r+1)^{\text{ten}}$ Punkt

ausserdem noch enthalten, die Kurve würde also die Grundkurve wieder in $2r+2$ Punkten schneiden.

Nun ist für die Fälle $r = 0, 1$

$$\xi\,(0,0) = 1, \qquad \xi\,(1,1) = 1,$$

also allgemein:

$$\xi\,(r, r) = 1.$$

Die Benützung der nun gefundenen speziellen Werte ergiebt unter Zugrundelegung der Binomialformel:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

der Reihe nach die Werthe:

$$\xi\,(R, 1) = \binom{R+1}{2};\ \xi\,(R, 2) = \binom{R+1}{3};\ \xi\,(R, 3) = \binom{R+1}{4};\ \ldots$$

und als Schlussformel:

(D) $$\xi\,(R, r) = \binom{R+1}{r+1}.$$

Dies ist die von Herrn Brill Math. Ann. Bd. 5 S. 395 aufgestellte Formel, zu der man auch gelangen kann durch eine Methode, die Herr Zeuthen anwendet, nämlich durch Betrachtung einfacher Korrespondenzen.

Nachdem nun die Zahl $\xi\,(R, r)$ aufgestellt ist, kann die Formel A) dazu verwendet werden, um die allgemeine Formel $\xi\,(R, r, p)$ abzuleiten. Man erhält nämlich mit Gebrauch der Binomialformel:

$$\binom{m-1}{n-1} = \binom{m}{n} - \binom{m-1}{n}$$

successive die Werte:

$$\xi\,(R, r, 0) = \binom{R+1}{r+1}$$

$$\xi\,(R, r, 1) = \binom{R+1}{r+1} - \binom{R-1}{r-1}$$

$$\xi\,(R, r, 2) = \binom{R+1}{r+1} - 2\binom{R-1}{r-1} + \binom{R-3}{r-3}$$

$$\xi\,(R, r, 3) = \binom{R+1}{r+1} - 3\binom{R-1}{r-1} + 3\binom{R-3}{r-3} - \binom{R-5}{r-5}$$

und allgemein:

$$\xi(R, r, p) = \binom{R+1}{r+1} - \binom{p}{1}\binom{R-1}{r-1} + \binom{p}{2}\binom{R-3}{r-3} - \ldots\ldots \text{[1]}$$

$$+ \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{p}{\frac{r}{2}} \binom{R-r+1}{1} & \text{für gerades } r \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \binom{p}{\frac{r+1}{2}} & \text{für ungerades } r \end{cases}$$

und für diese Formel stimmt wieder die Rekursionsformel B.

§ 3.

Beziehung zwischen Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf Kurven von verschiedenem Geschlecht.

Die Formel A)

$$\xi(R, r, p) = \xi(R-1, r, p-1) + \xi(R-2, r-1, p-1)$$

gilt auch dann noch, wenn φ-Kurven als adjungierte Kurven gewählt werden, und soll daher nun für Spezialgruppen gedeutet werden.

Wenn man nämlich die zu den Spezialscharen $g_Q^{(1)}$ residualen mit $\gamma_R^{(r)}$ bezeichnet, so bedeutet nach § 1. $\xi(R, r, p)$ die Zahl der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer allgemeinen Kurve vom Geschlecht p.

Die Formel $\xi(R-1, r, p-1)$ bezieht sich auf adjungierte Kurven mit $2r$ Parametern, welche durch ausgezeichnete Punktgruppen von $r-1$ Punkten gehen und die Grundkurve $C^{(p-1)}$ noch in $R-1$ beweglichen Punkten schneiden; und daher noch eine Spezialschar

$$\gamma_{R-1}^{(r)}$$

ausschneiden. Dieser entspricht eine Restschar $g_{Q-1}^{(1)}$ und es ist:

$$\tau_1 = p - 1 - 2(p - Q + 1) = 2Q - p - 3 = \tau - 1$$

Will man aber die Anzahl der Spezialscharen $g_{Q-1}^{(1)}$ auf der $C^{(p-1)}$ bestimmen, so hat man für die φ-Kurven

$$\tau_1 + 1 = 2Q - p - 2$$

---

1) Brill, Mathem. Annalen. Bd. 36. Bd. 7. — Zeuthen, Mathem. Annalen. Bd. 20.

feste Basispunkte anzunehmen und dazu noch Gruppen von

$$Q - (2Q - p - 2) = p - Q + 2 = r + 1$$

Punkten zu bestimmen, durch welche ∞^r viele φ-Kurven gehen, und diese sind in der Zahl $\xi\,(R-1, r, p-1)$ vorhanden. Endlich bezieht sich die dritte Zahl $\xi\,(R-2, r-1, p-1)$ auf ein System adjungierter φ-Kurven mit $2r-2$ linearen Parametern, welches durch $(r-1)+1 = r$ ausgezeichnete Punkte der Grundkurve $C_u^{(p-1)}$ hindurchgeht und eine Spezialschar $\gamma_{R-2}^{(r-1)}$ auf $C^{(p-1)}$ ausschneidet. Nach dem Satz von Riemann-Roch gehört zu dieser Spezialschar als Rest eine $g_Q^{(1)}$, und ferner ist:

$$\tau_2 = p - 1 - 2\,(p - Q) = 2Q - p - 1 = \tau + 1$$

Um die Zahl der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf der Grundkurve $C^{(p-1)}$ zu bestimmen, nimmt man also

$$\tau_2 + 1 = 2Q - p$$

einfache Grundpunkte für die ausschneidenden adjungierten Kurven beliebig an und sucht nun Gruppen von

$$Q - (2Q - p) = p - Q = r$$

Punkten, durch welche noch ∞^{r-1} Kurven gehen, ihre Anzahl ist somit eben $\xi\,(R-2, r-1, p-1)$.

Bezeichnet man die Anzahl der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer $C^{(p)}$ mit ${}_{(p)}g_Q^{(1)}$, so kann man das Ergebnis in die Gleichung fassen:

$${}_{(p)}g_Q^{(1)} = {}_{(p-1)}g_{Q-1}^{(1)} + {}_{(p-1)}g_Q^{(1)}$$

Man kann diese Gleichung auf die Bestimmung der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p anwenden, für welche Q den Minimalwert angenommen hat. Dabei muss man gerades p und ungerades p unterscheiden.

1) Für gerades p ist: $Q = \frac{p+2}{2} : g_{\frac{p+2}{2}}^{(1)}\ \tau = 0$

Nach unserer Formel ist:

$${}_{(p)}g_{\frac{p+2}{2}}^{(1)} = {}_{(p-1)}g_{\frac{p+2}{2}-1}^{(1)} + {}_{(p+1)}g_{\frac{p+2}{2}}^{(1)}$$

Nun ist die Minimalzahl Q für ein ungerades p: $Q = \frac{p+3}{2}$; da aber die erste Gruppe der rechten Seite $Q_1 = \frac{p}{2}$ enthält, und eine

solche Spezialschar auf der $C^{(p-1)}$ nicht existieren kann, so bleibt:

$$_{(p)}g^{(1)}_{\frac{p+2}{2}} = {}_{(p-1)}g^{(1)}_{\frac{p+2}{2}}$$

was ausgesprochen werden kann in dem Satz:

Die Zahl der Punktgruppen $g^{(1)}_{\frac{p+2}{2}}$ auf einer Kurve von einem geraden Geschlecht p ist gleich der Zahl der Punktgruppen $g^{(1)}_{\frac{p_1+3}{2}}$ auf einer Kurve vom nächst niedrigeren Geschlecht $p_1 = p - 1$.

Für ungerades p ist $Q = \frac{p+3}{2}$: $g^{(1)}_{\frac{p+3}{2}}$, $\tau = 1$.

Unsere allgemeine Formel ergiebt:

$$_{(p)}g^{(1)}_{\frac{p+3}{2}} = {}_{(p-1)}g^{(1)}_{\frac{p+1}{2}} + {}_{(p-1)}g^{(1)}_{\frac{p+3}{2}}$$

wo die beiden auf der rechten Seite stehenden Spezialscharen auf der $C^{(p-1)}$ existieren.

So ist z. B.

$$_{(p)}g^{(1)}_{\frac{p+3}{2}} = {}_{(p-1)}g^{(1)}_{\frac{p+1}{2}} + {}_{(p-1)}g^{(1)}_{\frac{p+3}{2}}$$

$p=5,$	5	=	2	+	3
7,	14	=	5	+	9
9,	42	=	14	+	28
11,	132	=	42	+	90.

§ 4.

Die Bestimmung der Spezialgruppen $g_R^{(r)}$, welche residual sind zu den Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p.

Wie die Bestimmung der Spezialgruppen $g_Q^{(1)}$ auf einer Kurve mit der Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen in Zusammenhang gebracht wurde, so kann man auch bei der Bestimmung der residualen Scharen $\gamma_R^{(r)}$ verfahren. Unter der Voraussetzung $\tau > 0$, von der wir ausgingen, ist die Anzahl dieser letzteren im allgemeinen verschieden von der Anzahl der $g_Q^{(1)}$ und muss daher besonders bestimmt werden.

Für die Zahlen r, R und Q gelten nach dem Reciprocitätssatz von Riemann-Roch die Gleichungen:

$$Q = 2p - 2 - R$$
$$R = p + r - 2 \quad \text{oder} \quad r = R - p + 2$$
$$\tau = p - 2r - 2 \qquad \tau = 3p - 2R - 6.$$

Um das Problem der Punktgruppen $g_R^{(r)}$ auf einer Kurve $C_n^{(p)}$ zu lösen, nimmt man nach der allgemeinen Methode auf der Grundkurve zunächst:

$$\tau + r = p - r - 2$$

Punkte als Basispunkte der φ-Kurven fest an und sucht dazu die diskrete Mannigfaltigkeit von

$$R - \tau - r = R + r - p + 2 = p + r - 2 + r - p + 2 = 2r$$

Punkten, durch welche noch ∞^1 viele adjungierte Kurven C_{n-3} hindurchgehen, die noch in weiteren Q beweglichen Punkten die Grundkurve schneiden.

Nach Annahme der festen Grundpunkte für die adjungierten Kurven C_{n-3} bleiben von den $p-1$ Konstanten in deren Gleichung noch:

$$p - 1 - (\tau + r) = p - 1 - (p - r - 2) = r + 1.$$

übrig. Daher können wir das Problem der Spezialgruppen durch das folgende allgemeinere ersetzen:

Es sei eine Grundkurve $C_n^{(p)}$ gegeben und ein System adjungierter Kurven mit $r+1$ linearen nicht homogenen willkürlichen Konstanten; die adjungierten Kurven schneiden die $C_n^{(p)}$ in R_1+2 beweglichen Punkten. Man soll auf der Grundkurve ausgezeichnete Gruppen von $2r$ Punkten bestimmen, durch welche noch ∞^1 viele adjungierte Kurven des Systems hindurchgehen. (Oder mit andern Worten: Man soll auf der Kurve $C_n^{(p)}$ Gruppen von r Punkten bestimmen von einer solchen Beschaffenheit, dass die durch sie gehenden adjungierten Kurven alle durch r weitere durch sie mitbestimmte Punkte zugleich hindurchgehen.)

Der Grad s der adjungierten Kurven ist hiebei nicht gleich $n-3$ vorausgesetzt, sondern soll höher sein, $s \geq n-3$; auch können

feste Basispunkte ausserhalb der Grundkurve liegen. Für die Grössen R_1, r, p haben wir noch die Beziehung

$$r+1 \leqq R_1+2-p,$$

die im speziellen Fall, von dem wir ausgingen, als Gleichung erfüllt ist, und ferner, damit das Problem überhaupt einen Sinn hat:

$$R_1+2 > 2r+1.$$

Die gesuchte Anzahl von Punktgruppen von $2r$ Punkten ist nur abhängig von den Grössen R, r, p und soll bezeichnet werden mit: $\varkappa(R, r, p)$,

wo wieder R anstatt der Bezeichnung R_1 gesetzt ist. Zur Bestimmung der Zahl $\varkappa(R, r, p)$ stellen wir wieder eine Rekursionsformel auf, wie wir dies für die Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen in § (1) gethan haben.

An Stelle einer beliebigen Grundkurve $C_n^{(p)}$ nehme man eine Kurve, welche durch die Auflösung eines Doppelpunkts z. B. in zwei sehr naheliegende hyperbelartige Zweige aus einer Kurve desselben Grades, aber vom Geschlecht $p-1$: $C_n^{(p-1)}$ hervorgegangen ist. Von den für das adjungierte Kurvensystem fest zu wählenden Fundamentalpunkten legt man einen, etwa P, in die Nähe des aufgelösten Doppelpunkts auf einen der beiden Zweige. Es schneiden dann die adjungierten Kurven die Kurve $C_n^{(p)}$ in der Nähe des Punktes P immer noch einmal. Nach dem Verhalten dieses Schnittpunktes kann man die Gruppen ausgezeichneter Punkte, deren Gesamtzahl sich nicht geändert hat, in zwei verschiedene Arten trennen:

a) in solche Gruppen, von welchen kein Punkt in der Nähe des Punkts P liegt. Bei der Bildung des Doppelpunkts fällt einer der $R-2r+2$ noch beweglichen Punkte in diesen Doppelpunkt hinein, mit P zusammen.

b) in solche Gruppen, von welchen ein Punkt in der Nähe des Punkts P liegt, der dann bei der Bildung des Doppelpunkts mit P zugleich in diesen hineinrückt. Die Zahl der beweglichen Punkte bleibt die gleiche wie vorher, nämlich $R-2r+2$.

Die Gruppen a) geben beim Uebergang von der Kurve $C_n^{(p)}$ zu der $C_n^{(p-1)}$ Veranlassung zu ausgezeichneten Punktgruppen von $2r$ Punkten, durch welche noch ∞^1 viele adjungierte Kurven eines

Systems mit $r+1$ linearen willkürlichen Parametern gehen, welche die Grundkurve im ganzen in $R+1$ veränderlichen Punkten schneiden. Die Zahl der Gruppen a) ist daher gleich der Anzahl dieser Gruppen auf der $C_n^{(p-1)}$, nach der allgemeinen Formel also gleich:

$$\varkappa(R-1, r, p-1).$$

Dagegen lässt sich die Anzahl der unter b) fallenden Punktgruppen nicht mehr direkt bestimmen, wie es bei der ersten Aufgabe im ähnlichen Fall möglich war. Um zu einem Ausdruck für diese Zahl zu gelangen, bestimmt man zunächst auf einer Kurve $C_n^{(p-1)}$ die Anzahl von $2r-1$ Punkten, durch welche noch ∞^1 Kurven eines ∞^{r+1}-Systems hindurchgehen, die alle in einem festen einfachen Grundpunkt auf der $C_n^{(p-1)}$ die gleiche Tangente haben.

Zu diesem Zweck geht man aus von einem der $C_n^{(p-1)}$ adjungierten Kurvensystem, das noch $r+1$ willkürliche Parameter enthält, mindestens einen festen Basispunkt ausserhalb der Kurve $C_n^{(p-1)}$ besitzt und diese in $R+2$ veränderlichen Punkten schneidet.

Unter diesen Festsetzungen giebt es auf der Grundkurve

$$\varkappa(R, r, p-1)$$

ausgezeichnete Gruppen von $2r$ Punkten, die durch r unter ihnen bestimmt sind.

Sei der feste Basispunkt des adjungierten Kurvensystems ausserhalb der Grundkurve T, und es werde der Punkt T der Grundkurve genähert, so schneiden die adjungierten Kurven dieselbe in der Nähe des Punkts T, dann lassen sich die Punktgruppen von $2r$ Punkten nach dem Verhalten des Schnittpunkts wieder in 2 Arten unterscheiden.

a) Gruppen von ausgezeichneten Punkten, von denen keiner beim Aufrücken des Basispunktes auf die $C_n^{(p-1)}$ mit T zusammenfällt. Weil dann einer der nicht ausgezeichneten Schnittpunkte in den Punkt T fällt, so ist für diesen Fall die Zahl der veränderlichen Schnittpunkte mit der Kurve $C_n^{(p-1)}$ nur noch $R+1$. Die Anzahl dieser Punktgruppen a) berechnet sich in derselben Weise wie die Anzahl der Punktgruppen, von der man ausging; sie ist gegeben durch die Formel:

$$\varkappa(R-1, r, p-1).$$

b) Gruppen, von welchen ein Punkt in der Nähe von T liegt

und der daher mit diesem Basispunkt zusammenfällt, wenn er auf der $C_n^{(p-1)}$ angenommen ist. Die Verbindungslinie des Punktes T mit dem Punkt der Gruppe nähert sich dann einer Grenzlage, welche alle adjungierten Kurven durch die $2r-1$ nicht im festen Punkte liegenden ausgezeichneten Punkte berühren. Die Anzahl dieser Gruppen sei λ, so ist λ gleich einer Differenz, nämlich gleich der Zahl der Gruppen, von der ausgegangen wurde, wenn der Punkt T beliebig in der Ebene liegt, $\varkappa(R, r, p-1)$, vermindert um die Zahl der Gruppen (a):

$$\lambda = \varkappa(R, r, p-1) - \varkappa(R-1, r, p-1).$$

Nehmen wir nun den festen Punkt, der den verschiedenen ausgezeichneten Gruppen gemeinsam sein soll, im Doppelpunkt P der $C_n^{(p-1)}$ an, so befinden sich unter der eben bestimmten Zahl λ auch solche Gruppen, bei welchen der Grundpunkt des adjungierten Kurvensystems und der feste Punkt auf demselben Zweig des Doppelpunkts liegt, so dass die gemeinsame Tangente zugleich Tangente an diesen Zweig ist. Dann fällt ein weiterer Schnittpunkt der adjungierten Kurven in diesen Doppelpunkt. Die im Doppelpunkt liegenden beiden Punkte bilden dann mit jeder ausgezeichneten Gruppe von $2r-2$ Punkten auch wieder Gruppen von $2r$ Punkten, aus denen jedoch bei der Auflösung des Doppelpunkts keine der ausgezeichneten Gruppen von $2r$ Punkten, die gesucht sind, entstehen und die darum bei der Abzählung nicht mitgerechnet werden dürfen. Berücksichtigt man, dass die adjungierten Kurven die Grundkurve in einem Basispunkt berühren sollen, so hat man noch r Parameter in der Kurvenschar und die Zahl der veränderlichen Schnittpunkte ist R; die Anzahl der von λ noch wegzunehmenden Gruppen ist also

$$\varkappa(R-2, r-1, p-1).$$

Die Anzahl der Gruppen (b) ergiebt sich zu:

$$\varkappa(R, r, p-1) - \varkappa(R-1, r, p-1) - \varkappa(R-2, r-1, p-1),$$

dann folgt aus der Summe der Gruppen (a) und (b) die Rekursionsformel:

(E) $$\varkappa(R, r, p) = \varkappa(R, r, p-1) - \varkappa(R-2, r-1, p-1).$$

Durch diese Rekursionsformel schliesst man von der Anzahl der ausgezeichneten Punktgruppen auf irgend einer Kurve vom Geschlecht $p-1$ auf diejenige einer Kurve vom nächst höheren Geschlecht.

Um aber endlich eine Formel für die Zahl $\varkappa(R, r, p)$ aufstellen zu können, ist es nötig, diese Zahl für ein bestimmtes p abzuleiten. Für $p = 0$ etwa führt dies auf die Aufgabe:

Es sei ein Kurvensystem mit $r+1$ veränderlichen linearen Parametern gegeben, welches eine Kurve vom Geschlecht 0, z. B. eine Gerade, in $R+2$ veränderlichen Punkten schneidet. Wieviel Punktgruppen von $2r$ Punkten auf der Geraden giebt es, die durch r unter ihnen mitbestimmt sind, durch welche also noch ∞^1 viele Kurven des Systems hindurchgelegt werden können?

Dies ist eine Aufgabe nach Art der von Herrn Brill (Math. Ann. Bd. V) behandelten. Wir lösen dieselbe in folgender Weise.

Die Anzahl der gesuchten Gruppen sei

$$\varkappa(R, r).$$

Zuerst denken wir uns einen Punkt der Geraden als Basispunkt des Kurvensystems fest angenommen, so dass noch r veränderliche lineare Parameter in der Kurvengleichung bleiben und die Gerade in $R+1$ veränderlichen Punkten geschnitten wird. Dann giebt es noch

$$\varkappa(R-1, r-1)$$

Gruppen von $2r-2$ Punkten, durch welche noch ∞^1 Kurven der Schar hindurchgehen. Nun sollen wieder alle Parameter als veränderlich vorausgesetzt werden, wie in der Aufgabe angegeben; wir fragen dann nach der Anzahl der Punktgruppen von $2r-2$ Punkten, durch welche noch ∞^2 Kurven gehen. Hat man die Anzahl dieser Gruppen bestimmt, so müssen durch einen jeden beliebigen Punkt der Geraden so viel mal ∞^1 Kurven gehen, als die Zahl jener Punktgruppen beträgt. Diese Zahl ist somit die zuerst bestimmte:

$$\varkappa(R-1, r-1).$$

Zu jeder dieser Gruppen von $2r-2$ Punkten, die feste Punkte auf der Geraden sind, suchen wir nun die Zahl der Gruppen von 2 Punkten, durch welche noch ∞^1 Kurven gehen. Das ∞^2-Kurvensystem, das nach Bestimmung jener Punktgruppen geblieben ist, schneidet die Gerade noch in $R-2r+2+2 = R-2r+4$ veränderlichen Punkten, also ist die Zahl der Gruppen von 2 Punkten, zu jeder der Gruppen von $2r-2$ Punkten:

$$\varkappa(R-2r+2, 1).$$

Die Gruppen von $2r$ Punkten, durch welche noch ∞^1 Kurven gehen, sind gegeben durch das Produkt

$$\varkappa(R-1, r-1) \cdot \varkappa(R-2r+2, 1),$$

doch ist diese Zahl grösser als die gesuchte Zahl der von einander unabhängigen Gruppen. Nach unserer Bestimmung sind 2 der Koeffizienten der Gleichung unsymmetrisch bevorzugt, und da es $\binom{r+1}{2}$ Kombinationen unter den $r+1$ Koeffizienten giebt, so ist die wirklich gesuchte Anzahl:

$$(F) \qquad \ldots . \varkappa(R, r) = \frac{\varkappa(R-1, r-1)\,\varkappa(R-2r+2, 1)}{\binom{r+1}{2}}.$$

Für spezielle Fälle ist eine Lösung des Problems leicht anzugeben:

1) Für $r = 1$ hat man wieder das in § (2) behandelte Problem, das den Wert ergab:

$$\varkappa(R, 1) = \frac{1}{2}(R+1)R.$$

2) Ist $R+2 = 2r+1$, so kann man ähnlich, wie dies für $\xi(r, r)$ gezeigt wurde, zeigen, dass die Zahl $\varkappa(R, r) = \varkappa(2r-1, r)$ nicht grösser sein kann als 1. Da sie sich in einem speziellen Fall gleich 1 ergiebt, so ist

$$\varkappa(2r-1, r) = 1.$$

Mit Hilfe der Formel (F) erhält man aus diesen Spezialwerten den allgemeinen Ausdruck:

$$(G) \qquad \varkappa(R, r) = \frac{1}{r+1}\binom{R-r+2}{r}\binom{R-r+1}{r},$$

woraus für $r = 2$ sich ergiebt:

$$\varkappa(R, 2) = \frac{1}{3}\binom{R}{2}\binom{R-1}{2}.$$

Dies ist die Anzahl der 4-fach schneidenden Sehnen einer rationalen Raumkurve vom Grad $R+2$. (Fr. Meyer, Ueber Determinanten etc. Math. Annalen, Bd. 38.)

Aus der Formel (G) leitet man nun mit Hilfe der Recursionsformel (E) der Reihe nach die Werte ab:

$$\varkappa(R, r, 1) = \frac{1}{r+1}\binom{R-r+2}{r}\binom{R-r+1}{r} - \frac{1}{r}\binom{R-r+1}{r-1}\binom{R-r}{r-1},$$

$$\varkappa(R, r, 2) = \frac{1}{r+1}\binom{R-r+2}{r}\binom{R-r+1}{r} - \frac{2}{r}\binom{R-r+1}{r-1}\binom{R-r}{r-1} + \\ + \frac{1}{r-1}\binom{R-r}{r-2}\binom{R-r-1}{r-2},$$

$$\varkappa(R, r, 3) = \frac{1}{r+1}\binom{R-r+2}{r}\binom{R-r+1}{r} - \frac{3}{r}\binom{R-r+1}{r-1}\binom{R-r}{r-1} + \\ + \frac{3}{r-1}\binom{R-r}{r-2}\binom{R-r-1}{r-2} - \frac{1}{r-2}\binom{R-r-1}{r-3}\binom{R-r-2}{r-3}$$

und schliesslich allgemein [1])

$$\text{(H)} \qquad \varkappa(R, r, p) = \frac{1}{r+1}\binom{R-r+2}{r}\binom{R-r+1}{r} - \\ - \frac{1}{r}\binom{R-r+1}{r-1}\binom{R-r}{r-1}\binom{p}{1} + \frac{1}{r-1}\binom{R-r}{r-2}\binom{R-r-1}{r-2}\binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{r} = \\ = \sum_{i=0} \frac{(-1)^i}{r+1-i}\binom{R-r+2-i}{r-i}\binom{R-r+1-i}{r-i}\binom{p}{i}.$$

Beispiel. Zur Erläuterung der Ableitung der Formel (E) soll die Bestimmung der Spezialscharen $g_8^{(2)}$ auf einer Kurve $C_9^{(8)}$, mit $d = 20$ Doppelpunkten, eingehend behandelt werden.

Nach dem Reciprocitäts-Satz von Riemann-Roch gehört zu der Spezialschar $g_8^{(2)}$ als Rest eine $\gamma_6^{(1)}$, und es ist für diese Scharen $\tau = 8 - 2 \cdot 3 = 2$. Die Spezialscharen $g_8^{(2)}$ selbst bilden einen besonderen Fall der Spezialschaaren $g_p^{(2)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p, deren Rest eine Schar $\gamma_{p-2}^{(1)}$ ist.

Um die Anzahl der Spezialgruppen $g_8^{(2)}$ auf der Grundkurve $C_9^{(8)}$ zu bestimmen, muss man zu $\tau + 2 = 4$ auf dieser Kurve beliebig gewählten Basispunkten für das adjungierte Kurvensystem C_6 noch Gruppen von $8 - 4 = 4$ weiteren Punkten so finden, dass durch alle 8 Punkte noch ∞^1 viele Kurven des Systems gehen. Nach der Annahme von 4 Basispunkten für die φ-Kurven sind von den $p - 1 = 7$ linearen Konstanten in deren Gleichung noch 3 unbestimmt geblieben. Man hat also $r + 1 = 3$, und für die Gesamt-

1) Castelnuovo, Rendic. Circ. mat. Palermo. T. III. 1889.

heit der veränderlichen Schnittpunkte $R+2=10$ zu setzen. Zur Lösung des Problems wählt man eine Kurve $C_9^{(8)}$, welche aus einer $C_9^{(7)}$ hervorgegangen ist durch Auflösung eines Doppelpunkts in 2 sehr nahe hyperbelartige Zweige [1]). Einen der 4 Basispunkte für das adjungierte Kurvensystem verlegt man in die Nähe des aufgelösten Doppelpunkts auf einen der Zweige. Dann lässt sich nach unsern allgemeinen Erörterungen die gesuchte Zahl zusammensetzen aus zwei Anzahlen für ausgezeichnete Punktgruppen auf der $C_9^{(7)}$. Nämlich:

a) Aus der Zahl der Punktgruppen von 4 Punkten auf der $C_9^{(7)}$, durch die ∞^1 Kurven eines adjungierten C_6-Systems mit noch 3 veränderlichen Parametern gehen, nachdem für dieselben 3 Basispunkte ausser den in den Doppelpunkten auf der Kurve angenommen sind. Die adjungierten Kurven schneiden die Grundkurve im ganzen noch in $R_1+2=9$ beweglichen Schnittpunkten, und die Kurven durch die gesuchten Punktgruppen führen auf eine Spezialschar $\gamma_5^{(1)}$.

b) Aus der Zahl von Punktgruppen von 3 Punkten, die zusammen mit einer bestimmten Tangentenrichtung in dem neuen Doppelpunkt nur 2 Bestimmungsstücke für die adjungierten Kurven absorbieren. Die adjungierten Kurven mit diesen Fundamentalstücken schneiden dann noch eine $\gamma_6^{(1)}$ auf der $C_9^{(7)}$ aus. Um die Bestimmung dieser Gruppen handelt es sich hauptsächlich.

Um diese Aufgabe zu lösen, sucht man zuerst 3 Punkte auf der Kurve, durch welche noch ∞^1 viele der $C_9^{(7)}$ adjungierte Kurven gehen mit gleicher, durch jene 3 Punkte mitbestimmte, Tangente in einem Basispunkt, der zunächst ein einfacher Punkt der $C_9^{(7)}$ ist.

Für die zu der $C_9^{(7)}$ adjungierten Kurven C_6 werden 2 feste Punkte

---

1) Es ist nicht schwer die Gleichung von derartigen Kurven mit einer gegebenen Anzahl von Doppelpunkten zu bilden. Eine solche Kurve $C_9^{(7)}$, wie wir sie hier brauchen, erhält man dadurch, dass man zuerst eine Kurve 6ten Grades mit 3 Doppelpunkten aufstellt und aus dieser durch eine quadratische Cremonatransformation, deren Fundamentalpunkte in einfachen Punkten der Kurve 6ter Ordnung liegen, die $C_9^{(7)}$ ableitet. Man erhält so eine Kurve, welche 3 vierfache Punkte mit getrennten Tangenten und 3 Doppelpunkte besitzt, wie es die Aufgabe verlangt.

auf der Grundkurve und noch ein fester Punkt ausserhalb derselben angenommen. Dann enthalten diese Kurven noch 3 willkürliche Konstanten und schneiden die $C_9^{(7)}$ in 10 beweglichen Schnittpunkten. Die Aufgabe, von diesen zehn Punkten 4 so zu bestimmen, dass durch sie noch ∞^1 Kurven C_6 hindurchgeschickt werden können, ist eine Aufgabe vom gleichen Charakter wie diejenige, von der ausgegangen wurde. Nach der allgemeinen Formel (H) ist die Anzahl dieser Punktgruppen:

$$\varkappa(8, 2, 7) = 70.$$

Die Anzahl der Punktgruppen von 3 Punkten, die eine Tangente in dem auf die $C_9^{(7)}$ in einen einfachen Punkt, aufgerückten Basispunkt mitbestimmen, ist gleich der Zahl $\varkappa(8, 2, 7)$, die eben definiert wurde, vermindert um die Zahl der ausgezeichneten Punktgruppen von ebenfalls 4 Punkten, wenn alle Basispunkte der adjungierten Kurven auf der $C_9^{(7)}$ liegen. Diese Gruppen sind aber identisch mit den Gruppen (a). Geht man nun wieder zur Bestimmung der Gruppen (b) über, so bemerkt man zunächst, dass die eben ermittelte Anzahl auch diejenigen Gruppen einschliesst, bei welchen die im Doppelpunkte für die adjungierten Kurven gezogene Tangente identisch ist mit der Tangente an einen Zweig des Doppelpunkts. Es bildet dann der in den Doppelpunkt gefallene Punkt mit 2 Punkten auf der Kurve eine uneigentliche Gruppe, die für die Gruppe (b) nicht mitgerechnet werden darf. Die Anzahl dieser Punktgruppen ist gleich der Anzahl der Spezialgruppen von 2 Punkten auf der $C_9^{(7)}$, durch welche noch ein ∞^1-System von adjungierten C_6-Kurven hindurchgeht, die ausser den Doppelpunkten 3 beliebig gewählte einfache Punkte der $C_9^{(7)}$ als Basispunkte besitzen und in einem Doppelpunkt die Grundkurve berühren.

Diese Anzahl ergiebt sich bei der Transformation der $C_9^{(7)}$ in eine Normalkurve $C_8^{(7)}$. Wählt man auf der Kurve $C_9^{(7)}$ $p - 3 = 4$ Punkte und eine Tangente in einem Doppelpunkt als feste Bestimmungsstücke für die φ-Kurve, dann bilden diese noch ein ∞^2-System und schneiden die Grundkurve noch in $2p - 2 - 4 = 8$ beweglichen Punkten; sie können benützt werden zur ein-eindeutigen Transformation der $C_9^{(7)}$ in eine $C_8^{(7)}$. Diese letztere Normalkurve muss

$\binom{7}{2} - 7 = 14$ Doppelpunkte besitzen: nämlich so viele, als es auf der $C_9^{(7)}$ noch Spezialgruppen von 2 Punkten giebt, durch welche noch ∞^1 viele adjungierte Kurven gehen, die in 6 weiteren beweglichen Punkten schneiden. Fasst man nun die Zahlen der Gruppen (a) und (b) zusammen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \varkappa(8,2,8) &= \varkappa(8,2,7) - \varkappa 6,1,7) \\ &= 70 - 14 = 56. \end{aligned}$$

Der allgemeinere Fall der Spezialgruppen $g_p^{(2)}$ auf Kurven vom Geschlecht p ist ebenfalls durch die Formel (H) gegeben. Nach Einsetzung der besonderen Werte erhält man:

$$\begin{aligned} {}_{(p)}g_p^{(2)} &= \frac{1}{3}\binom{p}{2}\binom{p-1}{2} - \frac{1}{2}\binom{p-1}{1}\binom{p-2}{1}p + \binom{p}{2} \\ &= \frac{1}{12}p(p-1)^2(p-2) - \frac{1}{2}p(p-1)(p-2) + \frac{1}{2}p(p-1). \end{aligned}$$

Für die Restschar $\gamma_{p-2}^{(1)}$ ist der Wert zu bestimmen aus der Gleichung (D)

$${}_{(p)}\gamma_{p-2}^{(1)} = \binom{p+1}{3} - \binom{p}{1}\binom{p-1}{1} = \frac{1}{6}(p+1)p(p-1) - p(p-1).$$

§ 5.

Zurückführung des Problems der Spezialgruppen $g_Q^{(q)}$ auf einer Kurve vom Geschlecht p, mit der Bedingung $\tau = 0$, auf eine Aufgabe der abzählenden Geometrie linearer Gebilde in höheren Räumen.

Die Methode, welche Herr Castelnuovo zur Bestimmung dieser Spezialgruppen anwendet, kann durch die folgende Betrachtung an ebenen Kurven ersetzt werden.

Die Spezialgruppen $g_Q^{(q)}$ auf einer Kurve $C_n^{(p)}$ werden immer durch adjungierte φ-Kurven ausgeschnitten. Wir benützen nun aber zum Ausschneiden der ausgezeichneten Punktgruppen adjungierte Kurven vom Grad $s > n-3$, weil es wünschenswert ist, mehr Be-

stimmungsstücke, z. B. beliebig wählbare Basispunkte eines Kurvensystems zur Verfügung frei zu haben, wobei es indessen gewöhnlich genügt $s = n - 2$, $n - 1$ zu nehmen. Man wähle auf der Grundkurve $C_n^{(p)}$ für die Kurven vom Grad s:

$$\sigma = ns - (d + r) - p - Q$$

feste Basispunkte, dann schneiden die adjungierten Kurven die $C_n^{(p)}$ noch in $(Q + p)$ beweglichen Schnittpunkten, und die Gleichung des Kurvensystems enthält noch Q veränderliche lineare Parameter. Wenn man nun ausgezeichnete Gruppen von p Punkten auf der Grundkurve bestimmt, durch welche ∞^q adjungierte Kurven von Grad s gehen, so schneidet dieses ∞^q-System auf der $C_n^{(p)}$ noch eine Gruppe $g_Q^{(q)}$ aus.

Statt einer beliebigen Kurve $C_n^{(p)}$, auf welcher die Bestimmung der Spezialscharen auszuführen ist, legt man eine solche, die aus einer rationalen Kurve $C_n^{(0)}$ durch Auflösung von p Doppelpunkten in je 2 benachbarte hyperbelartige Zweige hervorging, zu Grunde. Von den σ Basispunkten des Kurvensystems legt man p: P_1, P_2 ... P_p in die Nähe dieser Doppelpunkte auf einen der Hyperbelzweige. Bestimmt man nun die ausgezeichneten Punktgruppen von p Punkten, so fallen p Punkte einer jeden Gruppe in die Nähe der p festen Punkte P_1, P_2, ... P_p. Denn legt man zunächst nur einen der Punkte P, etwa P_1 in die Nähe eines aufgelösten Doppelpunkts, während die andern Punkte P beliebig auf der Kurve gewählt werden, so zerfallen die Gruppen von p Punkten, um deren Bestimmung es sich handelt

a) in solche Gruppen von p Punkten, von welchen mindestens einer in der Nähe des Punktes P liegt, also bei der Bildung des Doppelpunkts mit P_1 zusammenfällt.

b) in solche Gruppen, von welchen kein Punkt in die Nähe des Punktes P_1 fällt.

In dem Fall (b) liegt dann stets ein Punkt der Gruppen $g_Q^{(q)}$ in der Nähe von P_1, und es sind nach Bildung des Doppelpunkts durch die adjungierten Kurven noch eine Schar $g_{Q-1}^{(q)}$ auf der $C_n^{(p-1)}$ ausgeschnitten. Nach dem Riemann-Roch'schen Satz gehört zu dieser Schar als Rest eine Spezialschar $\gamma_{2p-Q-3}^{(p-Q+q-1)}$. Dann ist für diese Gruppen:

$$\tau_1 = (p-1) - (q+1)(p-Q+q).$$

Weil aber nach unserer Voraussetzung:

$$\tau = p - (q+1)(p-Q+q) = 0$$

ist, so hätte man $\tau_1 = -1$, was ausgeschlossen ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass nur die Gruppen (a) wirklich existieren. Legt man nun alle Punkte $P_1 \ldots P_p$ in die Nähe der aufgelösten Doppelpunkte und nimmt an, dass von den ausgezeichneten Gruppen von p Punkten etwa i nicht in die Nähe solcher fester Basispunkte fallen, dann erhält man auf der Kurve $C_n^{(p-i)}$ eine $g_{Q-i}^{(q)}$, welche als Spezialschar durch adjungierte C_{n-3} ausgeschnitten werden kann. Als Rest würde dieser Schar eine $\gamma_{2p-i-2-Q}^{(p-Q+q-1)}$ entsprechen und es wäre:

$$\tau_1 = p - (q+1)(p-Q+q) = -i$$

also τ_1 negativ, unsere Annahme führt wieder auf denselben Widerspruch und muss verworfen werden. Es bleibt somit nur die Annahme, dass bei der neuen Lage der Punkte P_1, $P_2 \ldots P_p$ die Punkte aller ausgezeichneten Punktgruppen in die Nähe dieser festen Punkte fallen.

Geht man nun von der speziellen $C_n^{(p)}$ wieder zu der $C_n^{(0)}$ über, und lässt die festen Punkte $P_1 \ldots P_p$ in die Doppelpunkte rücken, dann haben die Verbindungslinien von $P_1 \ldots P_p$ mit den Punkten der ausgezeichneten Gruppen immer eine bestimmte Grenzlage. Man erhält auf diese Weise ∞^q-Systeme von Kurven, welche allen Doppelpunkten der $C_n^{(0)}$ adjungiert sind und in p derselben bestimmte (noch unbekannte, gegenseitig von einander abhängende) Tangenten haben.

Wir haben schon festgestellt, dass die Zahl der willkürlichen Konstanten in der Gleichung der adjungierten Kurven Q ist. Ihre Gleichung kann daher auf die Form gebracht werden:

$$\alpha_1 \psi_1(x,y) + \alpha_2 \psi_2(x,y) + \ldots + \alpha_{Q+1} \psi_{Q+1}(x,y) = 0$$

Die Kurven, welche in p Doppelpunkten der $C_n^{(0)}$ bestimmte von einander abhängige Tangentenrichtungen besitzen, bilden noch ein ∞^q-System. Nehmen wir an, diese Tangenten seien bekannt, so kann man $q+1$ spezielle von einander linear unabhängige Kurven bestimmen mit den gegebenen Bedingungen, und die Gleichung des ∞^q-Systems auf die Form bringen:

(1) $\lambda_1(\psi_1 + a_{q+2}\psi_{q+2} + \ldots a_{Q+1}\psi_{Q+1}) + \lambda_2(\psi_2 + b_{q+2}\psi_{q+2} + + \ldots b_{Q+1}\psi_{Q+1}) + \ldots\ldots + \lambda_{q+1}(\psi_{q+1} + k_{q+2}\psi_{q+2} + \ldots + + k_{Q+1}\psi_{Q+1}) = 0,$

wo nun die λ unbestimmte Koeffizienten sind, die $a, b, \ldots k$ dagegen bestimmte aber noch unbekannte Koeffizienten. Wir schreiben kurz:

(1) $$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \ldots\ldots + \lambda_{q+1} K = 0.$$

Jede der Funktionen $A \ldots K$ enthält im ganzen noch $Q - q$ lineare Konstanten $a, b, \ldots k$, um deren Bestimmung es sich bei dem Problem handelt.

Wenn man nun aus der Gleichung (1) in den p neuen Doppelpunkten $P_1, \ldots P_p$ der $C_n^{(0)}$ oder abgekürzt $1, 2, \ldots p$, die Tangenten des Neigungswinkels einer Kurve (1) bestimmt, so muss sich diese von den Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_{q+1}$ unabhängig ergeben.

Bezeichnen

$$\frac{\partial A}{\partial x_1}, \frac{\partial A}{\partial y_1}; \frac{\partial A}{\partial x_2}, \frac{\partial A}{\partial y_2}; \ldots \frac{\partial A}{\partial x_\varepsilon}, \frac{\partial A}{\partial y_\varepsilon}; \ldots\ldots$$

die Ableitungen der in A, entsprechend in $B \ldots K$, enthaltenen Funktionen nach x bez. y, und genommen für die Punkte $1, 2 \ldots \varepsilon \ldots p$, so hat man für die Tangente in einem Punkt $\varepsilon\ (= 1, \ldots p)$:

$$(2) \ldots (\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial x_\varepsilon} + \lambda_2 \frac{\partial B}{\partial x_\varepsilon} + \ldots\ldots + \lambda_{q+1} \frac{\partial K}{\partial x_\varepsilon}) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_\varepsilon (\lambda_1 \frac{\partial K}{\partial y_\varepsilon} + \ldots + \lambda_{q+1} \frac{\partial K}{\partial y_\varepsilon}) = 0.$$

Weil $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\varepsilon$ unabhängig ist von den λ, so kann man immer q dieser Grössen 0 setzen und erhält dann:

(3) $$\mu_\varepsilon = \frac{\frac{\partial A}{\partial x_\varepsilon}}{\frac{\partial A}{\partial y_\varepsilon}} = \frac{\frac{\partial B}{\partial x_\varepsilon}}{\frac{\partial B}{\partial y_\varepsilon}} = \ldots = \frac{\frac{\partial K}{\partial x_\varepsilon}}{\frac{\partial K}{\partial y_\varepsilon}}$$

für $\varepsilon = 1, 2 \ldots p$.

In der Gleichung (3) sind für jedes ε: q Gleichungen enthalten, also hat man zur Bestimmung der $(q+1)$ $(Q \quad q)$ unbekannten Grössen $a, b, \ldots k$ zusammen $p\ q$ Gleichungen. Sollen diese Grössen bestimmt sein, so muss die Gleichung gelten:

$$p \cdot q = (q+1)\,(Q-q).$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$\tau = 0 = p - (q+1)\,(p - Q + q)$$

und daraus folgt:

$$p \cdot q = (q+1)\,(Q-q),$$

wie es die Bedingung verlangt.

Statt des Systems (3) kann man zwei Systeme von Gleichungen setzen, welche leichter erkennen lassen, unter welche Probleme der abzählenden Geometrie die zu lösende Aufgabe fällt.

Die Funktionen $A, B, \ldots K$ kann man auch in der Form annehmen:

$$A = \psi_1 + \alpha_2\,\psi_2 + \ldots\ \alpha_{q+1}\,\psi_{q+1} + a_{q+2}\,\psi_{q+2} + \ldots\ a_{Q+1}\,\psi_{Q+1}$$
$$B = \beta_1\,\psi_1 + \psi_2 + \ldots\qquad\qquad + b_{q+1}\,\psi_{q+2} + \ldots\ b_{Q+1}\,\varphi_{Q+1} \text{ etc.}$$

wo die $\alpha, \beta, \ldots \varkappa$ beliebig annehmbare Grössen sind. Die Auflösung der Gleichungen (3) ergiebt dann 2 simultane Systeme, indem man setzen kann;

$$(4)\ \ldots \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho\,\xi_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_\varepsilon} - \mu_\varepsilon \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_\varepsilon} \\ \vdots \\ \rho\,\xi_{Q+1} = \dfrac{\partial \psi_{Q+1}}{\partial x_\varepsilon} - \mu_\varepsilon \dfrac{\partial \psi_{Q+1}}{\partial y_\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon = 1, 2 \ldots . p$$

und

$$(5)\ \ldots . \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \ldots\ a_{q+2}\,\xi_{q+2} + \ldots\ a_{Q+1}\,\xi_{Q+4} = 0 \\ \beta_1\,\xi_1 + \quad \xi_2 + \ldots\ b_{q+2}\,\xi_{q+2} + \ldots\ b_{Q+1}\,\xi_{Q+1} = 0 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ \varkappa_1\,\xi_1 + \ldots\ \xi_{q+1} + k_{q+2}\,\xi_{q+2} + \ldots\ k_{Q+1}\,\xi_{Q+1} = 0 \end{array} \right.$$

Anmerkung. Deutet man die $\xi_1, \ldots \xi_{Q+1}, \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_\varepsilon} \ldots \dfrac{\partial \psi_{Q+1}}{\partial x_\varepsilon}$, $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_\varepsilon} \ldots .$ als Koordinaten in einem Raum von Q Dimensionen, und betrachtet vorübergehend μ_ε als veränderlich, so stellen die Gleichungen (4) in dem Raum von Q Dimensionen p Gerade vor, und das Gleichungssystem (6) eine ebene Mannigfaltigkeit von $(Q - q - 1)$ Dimensionen. Das Zusammenbestehen der Gleichung (4) und (5), das dann für μ_ε wieder bestimmte Werte erfordert, ist der Ausdruck

dafür, dass der Raum $[Q-q-1]$ die p Geraden im Raum $[Q]$ schneidet. Die verschiedenen Systeme der Grössen $a, b, \ldots k$ geben dann ebenso viele ebene Räume $[Q-q-1]$, so dass die zu lösende Aufgabe gleichbedeutend ist mit der andern:

Wieviele ebene Räume von $(Q-q-1)$ Dimensionen giebt es in einem Raum $[Q]$, welche p Gerade des Raumes $[Q]$ schneiden?

Diese Aufgabe fällt unter die von Herrn Schubert behandelten Aufgaben[1]) und führt auf die Formel:

$$N=\frac{1!\,2!\ldots q!\,1!\,2!\ldots(p-Q+q+1)!\,p!}{1!\,2!\,3!\ldots(p-Q+2q)!}$$

1) Vergl. auch Castelnuovo, Numeri degli spazi etc. Acad. dei Lincei Vol. V.